In welchen Punkten seiner Oberfläche ruht ein durch einen Halbkreis entstandenes, homogenes schweres Halbellipsoid, und was für Gleichgewicht findet in ihnen statt?

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

der philosophischen Facultät

der

Universität zu Erlangen

von

Karl Meyer

aus Berlinchen.

ERLANGEN.

Druck der Universitäts-Buchdruckerei von Junge & Sohn.

1887.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546420_0073

Ein homogenes schweres Ellipsoid ist durch einen Kreisschnitt in zwei gleiche Teile geteilt; in welchen Punkten seiner Oberfläche ruht ein solches halbes Ellipsoid auf einer horizontalen Ebene, und was für Gleichgewicht findet in ihnen statt?

Als Gleichung des auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Ellipsoids nehmen wir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und setzen dabei voraus, um eine bestimmte Vorstellung von den Achsenverhältnissen zu haben, $a > b > c$, wodurch die Allgemeinheit der Gleichung nicht beeinträchtigt wird, weil es jederzeit freisteht die grösste der Halbachsen als x-, die mittlere als y-, die kleinste als z-Achse zu wählen. Wir schneiden jetzt das Ellipsoid durch eine Ebene, deren Spur in der xy-Ebene mit der x-Achse den Winkel φ bildet und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene ψ ist. Den Durchschnitt dieser Ebene mit der x-Achse, welcher vom Mittelpunkt des Ellipsoids um 1 entfernt sei, nehmen wir zum Anfangspunkt eines neuen Coordinatensystems. Die Horizontalspur der Ebene nehmen wir zur x'-Achse und senkrecht darauf die y' Achse in der Ebene selbst; dann ist

$$\begin{aligned} x &= 1 + x'\cos\varphi - x'\sin\varphi \,.\, \cos\psi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \,.\, \cos\psi \\ z &= \qquad\qquad y'\sin\psi. \end{aligned}$$

Der Durchschnitt beider Flächen wird dann dargestellt durch eine Gleichung von der Form

1) $Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' + 2Dx' + 2Ey' + F = o.$

Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oder

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 - b^2 - r^2 = o.$

Damit nun eine Gleichung 2. Grades, die durch 1) ausgedrückt wird, einen Kreis darstellt, muss also sein

I. $A = B.$ II. $C = o.$

Es ist aber in unserm Coordinatensystem:

$$A = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$$

$$B = \left(\frac{\sin^2\varphi}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{b^2}\right)\cos^2\psi + \frac{\sin^2\psi}{c^2}$$

$$C = \frac{(a^2-b^2)\cos\varphi\,\sin\varphi\,\cos\psi}{a^2 . b^2}.$$

Da $C = o$ sein soll, so muss entweder $\cos\psi = o$, oder $\sin\varphi = o$, oder $\cos\varphi = o$ sein.

Für $\cos\psi = o$ giebt I)

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{\sin^2\psi}{c^2}$$

$$\cos^2\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{a}{c}\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{b^2-a^2}},$$ also imaginär da $a^2 > b^2$.

$\sin\varphi = o$ führt ebenfalls zu einem imaginären Ausdruck, da

$$\sin\psi = \pm\frac{c}{b}\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$$ wird.

Dagegen wird für $\cos\varphi = o$, aus I

$$\sin\psi = \pm\frac{c}{b}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist immer reell und kleiner als 1, da er das Product zweier echten Brüche ist.

Es existiren daher, da man für ψ zwei Werte erhält, zwei Schaaren paralleler Ebenen, die Kreise aus dem Ellipsoid schneiden; wegen $\cos\varphi = o$ stehen sie senkrecht auf der xz-Ebene. Die beiden Kreise, die das Ellipsoid in zwei gleiche Teile teilen, gehen durch den Mittelpunkt des Ellipsoids und zwar durch die y-Achse.

Hier fügen wir noch hinzu, dass, wenn man ein Ellipsoid durch parallele Schnitte zerlegt, die Mittelpunkte aller dieser in einem Durchmesser liegen; für unsere Kreise ist die Gleichung dieses Durchmessers

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}} \cdot \frac{a}{c} z,\ y = o.$$

§ 2.

Wir nehmen als Halbellipsoid dasjenige, welches von der Ebene

$$x = -\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\, z$$

gerechnet, nach der Seite der positiven x liegt und bestimmen dessen Schwerpunkt.

A.

Da die xz-Ebene das halbe Ellipsoid in zwei symmetrische Teile teilt, so muss der Schwerpunkt in dieser liegen; ferner wissen wir, dass unser Körper sich in Kreisschnitte parallel der ebenen Begrenzung zerlegen lässt und, dass die Verbindungslinie der Centren, mithin der Schwerpunkte dieser Kreisscheiben auf einer Geraden liegen; der Schwerpunkt des halben Ellipsoids muss also auch auf dieser liegen. Da wir die Gleichung jener Verbindungslinie kennen, so brauchen wir nur eine Coordinate des Schwerpunkts auszurechnen, um ihn zu bestimmen.

Nehmen wir die z-Coordinate als die zu bestimmende und nennen dieselbe ζ, so wissen wir, dass

$$M\zeta = \int dx \int dy \int z\,dz$$

ist, wo M die Masse des halben Ellipsoids bezeichnet. Die Dichtigkeit desselben braucht, da es homogen ist, nicht in Betracht gezogen zu werden.

Die Integration gestaltet sich am einfachsten, wenn wir zuerst nach y integriren.

Die Grenzen, zwischen denen wir zu integriren haben, sind hierfür

$$y = \pm\, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Die Integration ausgeführt, giebt

$$M\zeta = \int dx \int z\,dz \,.\, 2\,b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Da $M = \frac{2}{3} abc\pi$, so ist

$$\zeta = \frac{3}{ac\pi} \int dx \int z\,dz \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Wir haben jetzt nur noch über die Fläche zu integriren, welche die xz-Ebene aus dem halben Ellipsoid ausschneidet und teilen diese, wie Figur zeigt, in 2 Teile I und II; wir erhalten als Grenzen für z in:

I) $+ c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ und $- c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

II) $+ c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ und $- \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} \cdot x.$

Da nämlich nach unserer Figur $\psi > 90^0$, so ist

$$\cos\psi = - \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \text{ und } tg\psi = - \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Als Grenzen für x erhalten wir in

I a und b cos $(18^0 - \psi) = + \dfrac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}$

II $+ a\sqrt{\dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$ und $- a\sqrt{\dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$.

Es wird also die z-Coordinate des Schwerpunkts:

$$\zeta = \varrho' + \varrho'' = \frac{3}{ac\pi}\int dx \int_{a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{a} z\,dz \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

$$= \frac{3}{ac\pi}\int dx \int_{a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} + c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{a} z\,dz \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

$$- a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}x$$

Setzen wir $c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \varepsilon$, so wird

$$\varrho' = \frac{3}{ac\pi}\int dx \int \frac{z}{c}\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}\,dz,$$

und setzen wir ferner $z = \varepsilon \sin\varphi$, so ist

$$dz = \varepsilon \cos\varphi\, d\varphi$$
$$\sqrt{\varepsilon^2 - z^2} = \varepsilon \cos\varphi,$$

wir erhalten also

$$\varrho' = \frac{3}{ac^2\pi}\int dx\, \varepsilon^3 \int \sin\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{ac^2\pi}\int \varepsilon^3\, dx \frac{\sin^2\varphi \cos\varphi}{3} + \frac{3}{ac^2\pi}\int \varepsilon^3 dx \tfrac{1}{3}\int \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{ac^2\pi}\int \varepsilon^3\, dx\, (\sin^2\varphi \cos\varphi - \cos\varphi)$$

$$= \frac{1}{ac^2\pi}\int \varepsilon^3\, dx \cos\varphi\, (\sin^2\varphi - 1).$$

Die Werte für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ eingesetzt, giebt:

$$\varrho' = \frac{1}{ac^2\pi} \int \varepsilon^3 \, dx \, \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}}{\varepsilon} \left(\frac{z^2}{\varepsilon^2} - 1\right).$$

Die Grenzen für z eingesetzt:

$$z = +\varepsilon = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \text{ und } z = -\varepsilon = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

giebt $\varrho' = 0$, wie man aus der Figur auch sehen konnte. Wir erhalten also:

$$\zeta = \varrho'' = \frac{3}{ac\pi} \int_{-a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}}^{+a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}} dx \int_{-\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}x}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} z\,dz \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$$

Die Integration nach z ausgeführt

$$\zeta = \frac{1}{ac^2\pi} \int dx \left\{ z^2 \sqrt{\varepsilon^2 - z^2} - \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - z^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{ac^2\pi} \int dx \sqrt{\varepsilon^2 - z^2}^{\,3}$$

Die obere Grenze eingesetzt, giebt 0; die untere giebt:

$$\zeta = \frac{1}{ac^2\pi} \int dx \sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left[a^2 - x^2 - \frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}\right]}^{\,3}$$

$$= \frac{c}{a^4\pi} \int \sqrt{\frac{a^2(b^2-c^2) - (a^2-c^2)\,x^2}{b^2-c^2}}^{\,3} dx$$

$$= \frac{c\sqrt{a^2-c^2}^{\,3}}{a^4\pi\sqrt{b^2-c^2}^{\,3}} \int \sqrt{\lambda^2 - x^2}^{\,3} dx, \text{ wo } \lambda^2 = \frac{a^2(b^2-c^2)}{a^2-c^2}$$

Setze $x = \lambda \sin\varphi$, so ist

$$\zeta = \frac{c\sqrt{a^2-c^2}^{\,3}}{a^4\pi\sqrt{b^2-c^2}^{\,3}} \int \lambda^4 \cos^4\varphi \, d\varphi$$

$$\int \cos^4\varphi = \frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{4} + \frac{3}{8}\int \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{4} + \frac{3}{8}\varphi + \frac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi$$

Die Werte für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, φ eingesetzt

$$\zeta = \frac{c}{a^4\pi}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}^3}\,\lambda^4\left[\frac{x}{\lambda}\frac{\sqrt{\lambda^2-x^2}^3}{4\lambda^3} + \frac{3}{8}\arcsin\frac{x}{\lambda} + \frac{3}{8}\frac{x}{\lambda}\frac{\sqrt{\lambda^2-x^2}}{\lambda}\right]$$

Als Grenzen für x hatten wir $\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} = \pm\lambda$,

wir erhalten also

$$\zeta = \frac{3}{8}c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie der Centren der Kreisschnitte war

$$x = \frac{3}{8}a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-e^2}}\cdot z \quad \text{also}$$

$$\xi = \frac{3}{8}a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}.$$

B.

Einfacher erhalten wir die Coordinaten des Schwerpunktes, wenn wir die Coordinatenachsen der x und z drehen und zwar so, dass die neue z'-Achse die Spur unseres Kreisschnitts durch den Mittelpunkt mit xz-Ebene, und die neue x'-Achse die Verbindungslinie der Centren der Kreisschnitte ist.

Die neuen Achsen der x' und z' bilden dann mit der x-Achse die uns bekannten Winkel φ und ψ.

Es ist dann

$$x = x'\cos\varphi + z'\cos\psi$$
$$z = x'\sin\varphi + z'\sin\psi.$$

Die Gleichung der Ellipse war

$$c^2x^2 + a^2z^2 = a^2c^2,$$

also im neuen System:

$$c^2 (x'^2 \cos^2\varphi + z'^2 \cos^2\psi + 2x'z' \cos\varphi \cos\psi) +$$
$$a^2 (x'^2 \sin^2\varphi + z'^2 \sin^2\psi + 2x'z' \sin\varphi \cos\psi) = a^2c^2$$
$$x'^2 (c^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi) + z'^2 (c^2 \cos^2\psi + a^2 \sin^2\psi) +$$
$$2x'z' (c^2 \cos\varphi \cos\psi + a^2 \sin\varphi \,.\, \sin\psi) = a^2c^2.$$

$$z'^2 + 2x\,z' \frac{c^2 \cos\varphi \cos\psi + a^2 \sin\varphi \,.\, \sin\psi}{c^2 \cos^2\psi + a^2 \sin\psi} =$$
$$\frac{a^2c^2 - x'^2 (c^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin\varphi}{c^2 \cos^2\psi + a^2 \sin^2\psi}$$

$$1)\ z' = -\frac{x' (c^2 \cos\varphi \cos\psi + a^2 \sin\varphi \sin\psi)}{c^2 \cos^2\psi + a^2 \sin\psi^2}$$
$$\pm \sqrt{\frac{x'^2 (c^2 \cos\varphi \cos\psi + a^2 \sin\varphi \sin\psi)^2}{(c^2 \cos^2\psi + a^2 \sin^2\psi)^2} +}$$
$$\sqrt{\frac{a^2c^2 - x'^2 (c^2 \cos\varphi + a^2 \sin^2\varphi)}{c^2 \,.\, \cos^2\psi + a^2 \,.\, \sin^2\psi}}.$$

Wir hatten § 1 gefunden

$$\sin\psi = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ \cos\psi = -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

ferner

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}, \text{ also } \sin\varphi = \frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2(a^2-b^2)+c^2(b^2-c^2)}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2(a^2-b^2)+c^2(b^2-c^2)}}$$

Setzen wir die Werte ein, so wird

$$c^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi = \frac{a^2c^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} + \frac{a^2c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)} = \frac{a^2c^2}{b^2}$$

Für $x' = o$, wird $z' = b$, wie es auch sein muss.

Wir setzen $\frac{\sqrt{a^2(a^2-b^2)+c^2(b^2-c^2)}}{\sqrt{a^2-c^2}} = l$, es wird

$$c^2\cos\varphi\cos\psi + a^2\sin\varphi\sin\psi =$$
$$= -\frac{a^2c^2\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2-c^2}}{l.\ b.\ (a^2-c^2)} + \frac{a^2c^2\sqrt{b^2-c^2}\sqrt{a^2-b^2}}{l.\ b.\ (a^2-c^2} = o$$

$$c^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi = \frac{a^2c^2(a^2-b^2)}{(a^2-c^2)\,l^2} + \frac{a^2c^2(b^2-c^2)}{(a^2-c^2)\,l^2} = \frac{a^2c^2}{l^2}$$

Setzen wir dies in 1) ein, so wird

$$z' = \sqrt{\frac{a^2c^2\left(1 - \frac{x'^2}{l^2}\right)}{\frac{a^2c^2}{b^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{b^2}{l^2}(l^2 - x'^2}$$

Der Flächeninhalt der einzelnen Kreisschnitte beträgt:

$$F = \pi z'^2 = \frac{\pi b^2(l^2 - x'^2)}{l^2}$$

Bezeichnet ξ' die x'-Coordinate des Schwerpunkts, so wird:

$$M\xi' = \sin\omega \int_0^{h'} Fx'dx', \quad \text{wo}$$

$$h' = \frac{\sqrt{a^2(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} = l$$

und ω der Winkel zwischen der x'- und z'-Achse, als $\sin\omega = \sin(\psi - \zeta)$

$$M\xi' = \sin\omega . \frac{\pi b^2}{l^2} \int_0^l (l^2 - x'^2)x'dx'$$

$$= \sin\omega . \frac{\pi b^2}{l^2}\left[\frac{l^2x'^2}{2} - \frac{x'^4}{4}\right]_0^l$$

$$= \frac{\sin\omega . \pi b^2}{4l^2}\left[2l^4 - l^4\right]$$

$$= \frac{1}{4} \sin\omega . \pi b^2 l^2$$

$\sin\omega = \sin(\psi - \varphi) = \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi$, eingesetzt

$$= \frac{ac}{bl}$$

$$M\xi' = \frac{1}{4} abc\pi l$$

$$\xi' = \frac{3}{8} l$$

Drücken wir die Coordinaten in unserm rechtwinkligen System aus, so wird wie vorher

$$\xi = \xi' \cos\varphi = \frac{3}{8} a \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

$$\zeta = \xi' \sin\varphi = \frac{3}{8} a \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

Hätten wir die Aufgabe allgemein behandelt und das Ellipsoid durch eine beliebige Ebene durch den Mittelpunkt geteilt, so wären wir zu dem Resultat gekommen, dass der Schwerpunkt auf dem zu der Schnittfläche conjugirten Durchmesser liegt und denselben im Verhältnis 3 : 5 teilt.

Denkt man sich alle möglichen Centralschnitte durch das Ellipsoid gelegt, so liegen sämmtliche Schwerpunkte auf einem ähnlich und ähnlich liegenden Ellipsoid, dessen Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{9}{64}.$$

§ 3.

Wenn das Halbellipsoid der Schwerkraft unterworfen ist, so können wir bei der Untersuchung seiner Bewegung oder des Gleichgewichts annehmen, dass die gesammten Kräfte im Schwerpunkt angreifen. Soll daher der Körper auf einer horizontalen Ebene im Gleichgewicht sein, so muss man ihn so aufstellen, dass die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit dem Punkte, in welchem das Ellipsoid die horizontale Ebene berührt, die Richtung der Schwerkraft hat, also senkrecht zur Horizontalebene ist. Der Schwerpunkt muss also auf einer Normale des Ellipsoids liegen, und es kommt darauf an, die Normalen zu finden, die sich von unserm Schwerpunkt an das

Ellipsoid ziehen lassen, ein Problem, welches Joachimsthal so manigfaltig bearbeitet hat und Steiner, Cayley, Clebsch, Caspary u. a. erweitert haben.

Die Gleichung der Normalen durch den Schwerpunkt ξ, η, ζ an das Ellipsoid ist, wenn x, y, z die laufenden Coordinaten bezeichnen,

$$1) \quad \frac{\xi - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\eta - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\varrho - z}{\frac{z}{c^2}}$$

Setzen wir diese Ausdrücke $= \mu$, so wird

$$2) \; x = \frac{a^2\xi}{a^2+\mu}, \; y = \frac{b^2\eta}{b^2+\mu}, \; z = \frac{c^2\zeta}{c^2+\mu}$$

$$3) \; \xi = \frac{x(a^2+\mu)}{a^2}, \; \eta = \frac{y(b^2+\mu}{b^2}, \; \zeta = \frac{z(c^2+\mu)}{c^2}$$

Was die Bedeutung von μ angeht, so folgt einfach aus der Definition

$$\mu = - \sqrt{\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z-\varrho)^2}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Der Zähler in dem Ausdruck für μ ist die Entfernung des Schwerpunktes von dem Punkte (x, y, z) des Ellipsoids. Wir bezeichnen diese Entfernung mit l. Dann ist

$$4) \quad \mu = - \frac{l}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Die Gleichungen 2) und 3) wollen wir noch aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ableiten. Aus diesem Princip ergiebt sich als Bedingung des Gleichgewichts

$$\delta h = 0,$$

wenn man mit h die Entfernung des Schwerpunktes von der Horizontalebene bezeichnet, welch' letztere bei uns die Tangentialebene in dem Punkt x, y, z ist, auf dessen Bestimmung es ankommt. Die Gleichung der Tangential-

ebene im Punkte x, y, z mit den laufenden Coordinaten x' y', z' ist

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} + \frac{z'z}{c^2} = 1$$

Folglich ist die Entfernung des Schwerpunktes (ξ, η, ζ) von der Tangentialebene

$$h = - \frac{\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

Eigentlich müssten wir jetzt das Ellipsoid auf der Tangentialebene verschieben, um aber unser Coordinatensystem beibehalten zu können, denken wir uns lieber, dass die Tangentialebene an dem Ellipsoid entlang gleitet. Es ändern sich also die Coordinaten des Berührungspunktes x, y, z und zwar der Bedingung unterworfen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Um die Werte x, y, z zu finden, für welche $\delta h = 0$ ist, haben wir nun also nach der Lagrange'schen Methode den Ausdruck zu bilden

$$G = - \frac{\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} + \varrho \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

und seine partiellen Ableitungen nach x, y, z gleich 0 zu setzen. Es ist $\frac{dG}{dx} =$

$$- \frac{\xi}{a^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} - \left(\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2} - 1 \right) \frac{\frac{x}{a^4}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

$$\frac{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}{+ \frac{2\varrho x}{a^2}}$$

also lautet die Gleichung $\frac{dG}{dx} = 0$

$$\frac{\xi}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)$$
$$+2\varrho\,\frac{x}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}=0$$

oder da wir setzen können

$$2\varrho\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{3/2}=\varrho'.$$

$$-\frac{\xi}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{x}{a^4}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)+\frac{\varrho' x}{a^2}=0$$

$$-\frac{\eta}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{y}{b^4}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)+\frac{\varrho' y}{b^2}=0$$

$$-\frac{\zeta}{c^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{z}{c^4}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)+\frac{\varrho' z}{c^3}=0$$

Die beiden letzten Gleichungen sind nach dem Muster der ersten gebildet. Multiplizieren wir die Gleichungen der Reihe nach mit x, y, z und addieren sie, so folgt

$$\varrho' = \left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)$$
$$-\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)$$
$$=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$$

Also ergeben die vorigen Gleichungen, nachdem sie resp. mit a^2, b^2, c^2 multiplicirt sind:

$$0=(x-\xi)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{x}{a^2}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)$$

$$0=(y-\eta)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{y}{b^2}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)$$

$$0=(z-\zeta)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+\frac{z}{c^2}\left(\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}+\frac{\zeta z}{c^2}-1\right)$$

oder wenn

$$\frac{\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} + \frac{\zeta z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \mu$$

gesetzt wird.

$$o = x - \xi + \mu \frac{x}{a^2}$$

$$o = y - \eta + \mu \frac{y}{b^2}$$

$$o = z - \zeta + \mu \frac{z^2}{c^2}$$

Hieraus ergeben sich sofort die Gleichungen 2) und 3). Für μ erhalten wir hier

$$\mu = - \frac{h}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

also, da h offenbar = 1 ist, denselben Wert, wie früher.

§ 4.

Wie wir aus dem § 3 ersehen, erhalten wir im Allgemeinen für eine Coordinate eines Unterstützungspunktes eine Gleichung sechsten Grades; in unserm speciellen Fall ist nun aber nach § 2 $\eta = o$, was nach § 3 Nr. 3 nur in folgenden beiden Fällen sein kann.

I $\mu = - b^2$, II $y = o$

Ist $\mu = - b^2$, so sind x und z eindeutig bestimmt.

$$x = \frac{a^2 \xi}{a^2 - b^2}, \quad z = - \frac{c^2 \zeta}{b^2 - c^2}$$

und y erhalten wir aus der Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{a^2 \xi^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 \zeta^2}{(b^2 - c^2)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = + b \sqrt{1 - \left[\frac{a^2 \xi^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{c^2 \zeta^2}{(b^2 - c^2)^2} \right.}$$

y wird also reell oder imaginär, je nachdem

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{c^2\zeta^2}{(b^2-c^2)^2} \gtrless 1$$

Nehmen wir $\xi\zeta$ als laufende Coordinaten, so ist

$$\frac{a^2-\xi^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{c^2-\zeta}{(b^2-c^2)^2} = 1$$

die Gleichung einer Ellipse und zwar derjenigen, welche unsere xz-Ebene aus der einen Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche ausschneidet.

II) $y = o$.

A.

Ist $y = o$, so haben wir es nur mit der durch die xz-Ebene aus dem Ellipsoid ausgeschnittenen Ellipse zu thun. Ihre Gleichung ist mit den aus § 3 Nr. 2 für x und z eingesetzten Werten

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2+\mu)^2} + \frac{c^2\zeta^2}{(c^2+\mu)^2} = 1$$

Setzen wir die linke Seite $= f(\mu)$[1], so ist $f(\mu)$ bei unserer Wahl $a > c > o$ stets positiv; wird unendlich für $\mu = -a^2$ und $\mu = -c^2$ und verschwindet für $\mu = \pm\infty$.

Um zu sehen, ob die Curve ein Maximum oder Minimum hat, bilden wir

$$\frac{df(\mu)}{d\mu} = f'(\mu) = -2\left\{\frac{a^2\xi^2}{(a^2+\mu)^3} + \frac{c^2\zeta^2}{(c^2+\mu)^3}\right\}$$

$f'(\mu)$ verschwindet nur für

$$\frac{a^2+\mu}{c^2+\mu} = -\left(\frac{a^2\xi^2}{c^2\zeta^2}\right)^{1/3}$$

und ist ein Minimum, da der zweite Differentialquotient $f''(\mu)$ eine positive Grösse ist; der Wert von μ_1 liegt, wie aus $f'(\mu)$ ersichtlich, zwischen $-a^2$ und $-c^2$.

Es wird:

$$\mu_1 = -\frac{a^2(c\zeta)^{2/3} + c^2(a\xi)^{2/3}}{(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3}}$$

$$(a^2+\mu_1)^2 = \frac{(a\xi)^{4/3}\,(a^2-c^2)^2}{|(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3}|^2}$$

$$(c^2+\mu_1)^2 = \frac{(c\zeta)^{4/3}\,(a^2-c^2)^2}{|(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3}|^2}$$

$$f(\mu_1) = \frac{[(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3}]^3}{(a^2-c^2)^2}$$

Betrachten wir hiernach den Verlauf von $f(\mu)$, so hat es folgenden Gang:

Für $\mu = +\infty$, $< +\infty$ u. $< -c^2$, $> -c^2$ u. $\neq \mu_1$, wird $f(\mu) = o$, zunehmend, ∞, abnehmend, für $\mu = \mu_1$, $> \mu$, und $< -a^2$, $\neq -a^2$, $> -a^2$, $-\infty$ $f(\mu) = f(\mu_1)$, zunehmend, ∞, abnehmend, o.

Je nachdem also

$$(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} \gtreqless (a^2-c^2)^{2/3},$$

hat die Gleichung $f(\mu) - 1 = o$ 4, 3 oder 2 reelle Wurzeln.

Betrachten wir ξ und ζ als die laufenden Coordinaten x und z einer Curve, so ist die Gleichung

$$(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} = (a^2-c^2)^{2/3}$$

die Gleichung der Evolute unserer Ellipse, und zwar schneidet die xz-Ebene die Evolute aus der andern Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche aus. Je nachdem der Schwerpunkt $\xi\zeta$ also innerhalb, auf oder ausserhalb der Evolute liegt, können wir von ihm aus in xz-Ebene 4, 3 oder 2 Normalen an das Ellipsoid ziehen. Es fallen also, sobald der Schwerpunkt auf der Evolute liegt, zwei Normalen zusammen, was auch unmittelbar sich daraus ergiebt, dass jede Normale der Ellipse Tangente ihrer Evolute ist.

B.

Legendre führt die Aufgabe, die Normalen von einem Punkte an die Ellipse zu finden, folgendermassen durch.

Sind xz die Coordinaten des gesuchten Unterstützungspunktes, so haben wir aus der Gleichung der Ellipse

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Dieser Gleichung müssen die Werte $x = a \cos\omega$, $z = c \sin\omega$ genügen, wenn ω die wahre Anomalie der Ellipse ist.

Bilden wir mit diesen Werten für x und z das Quadrat der Entfernung ϱ dieses Punktes vom Punkte $\xi\zeta$, so haben wir:

$$\varrho^2 = (\xi - a\cos\omega)^2 + (\zeta - c\sin\omega)^2.$$

Soll nun die durch jene beiden Punkte gehende Linie Normale der Ellipse sein, so ist die Bedingung dafür

$$\frac{d(\varrho^2)}{d\omega} = 0 \quad \text{oder}$$

$$1)\ a\xi\sin\omega - c\zeta\cos\omega = (a^2 - c^2)\sin\omega\cos\omega$$

Setzen wir hierin $\frac{a\xi}{c\zeta} = p$, $\frac{a^2c^2}{c\zeta} = q$, so haben wir die Gleichung

$$p\sin\omega - \cos\omega = q\sin\omega\cos\omega.$$

Führen wir hier den Winkel $^1/_2\omega$ ein, und setzen $\operatorname{tg} {}^1/_2\omega = t$, so ist

$$2)\ t^4 + 2(p+q)\,t^3 + 2(p-q)\,t - 1 = 0$$

Da das Glied mit t^0 negativ ist, so hat die Gleichung mindestens 2 reelle Wurzeln; die Bedingung, dass sie 2 oder 4 reelle hat, ist $27p^2q^2 - (q^2 - p^2 - 1)^3 \gtrless 0$.

Diese Bedingung lässt sich noch bedeutend vereinfachen; setzt man

$$p^2 = \alpha^3,\quad q^2 = \beta^3,$$

so hat man für Fall, dass nur zwei Wurzeln reell sind:

$$3\alpha\beta - \beta^3 + \alpha^3 - 1 > 0 \quad \text{oder}$$

$(\alpha + 1)^3 - \beta^3 - 3\alpha(\alpha + 1 - \beta) > 0$. Es ist aber $(\alpha + 1)^3 - \beta^3 = (\alpha + 1 - \beta)\,|\beta^2 + \beta(\alpha + 1) + (\alpha + 1)^2|$.

Der letzte Factor ist stets positiv, also vereinfacht sich die Bedingung auf

$$(\alpha + 1 - \beta) > 0$$

Unsere Gleichung 2) hat also nur zwei reelle Wurzeln, wenn

$$q^{2/3} < p^{2/3} + 1$$

und sie hat vier reelle Wurzeln für

$$q^{2/3} > p^{2/3} + 1$$

Setzen wir für q und p ihre Werte ein, so erhalten wir wieder die oben gefundene Bedingung

$$(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} \gtrless (a^2-c^2)^{2/3}$$

für die Existenz von 4, 3 oder 2 reellen Wurzeln.

C.

Zu denselben Resultaten kommen wir auf eine dritte Art, wenn wir die Gleichung 4. Grades auflösen. Es war

$$\frac{a^2}{x}(\xi - x) = \frac{c^2}{z}(\zeta - z), \text{ also}$$

$$z = \frac{c^2\zeta x}{a^2\xi - (a^2-c^2)\,x}$$

In die Gleichung der Ellipse eingesetzt, giebt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2\zeta^2x^2}{[a^2\xi - (a^2-c^2)x]^2} = 1$$

$$1)\quad x^4 - \frac{2a^2\xi}{a^2-c^2}x^2 + \frac{a^2[a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)]}{(a^2-c^2)^2}\,x + \frac{2a^4\xi}{a^2-c^2}\,x - \frac{a^6\xi^2}{(a^2-c^2)^2}$$

Um x^3 fortzuschaffen, setzen wir

$$x = y - \frac{a^2\xi}{2(a^2-c^2)}, \text{ so erhalten wir}$$

$$2)\quad y^2 + \alpha y^2 + \beta y = 0, \text{ wo}$$

$$\alpha = \frac{a^2[2(c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2) - a^2\xi^2]}{2(a^2-c^2)^2}$$

$$\beta = \frac{a^4\xi[c^2\zeta^2 + (a^2-c^2)^2]}{(a^2-c^2)^3}$$

$$\gamma = \frac{a^6\xi^2[4(c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2) + a^2\xi^2]}{16(a^2-c^2)^4}$$

Die kubische Resolvente ist dann

3) $z^3 + 2\alpha z^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)z - \beta^2 = 0$

Da β positiv ist, so erhalten wir hieraus

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})$$
$$y_4 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})$$

Setzen wir in 3) $z = z' - \frac{2\alpha}{3}$, so ist

4) $z'^3 - 3pz' - 2q = 0$, wo

$$p = \frac{a^4}{9(a^2-c^2)^4}(a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2)^2$$

$$q = \frac{a^6}{27(a^2-c^2)^6}\{[a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2]^3 + 2.27a^2\xi^2 + c^2\zeta^2(a^2-c^2)^2\}$$

Aus 4) folgt

$$z' = \sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2-p^3}} + \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2-p^3}}$$

Hieraus erhalten wir, je nachdem die Diskriminante q^2-p^3 negativ, 0, oder positiv ist, 4, 3 oder 2 reelle x. q^2-p^3 wird aber 0, wenn, wie leicht aus den Werken von q und p zu ersehen,

$(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} = (a^2-c^2)^{2/3}$ ist.

Wir fügen hierzu noch eine von Joachimsthal angestellte Betrachtung. Da unser letztes Glied der Gleichung 1) negativ ist, so haben wir mindestens zwei reelle Wurzeln; und es genügt nun das Vorzeichen der einzigen symmetrischen Funktion der Wurzeln — Diskriminante — um zu bestimmen, ob wir 4 oder 2 reelle Wurzeln er-

halten. Seien α, β, γ, δ die Wurzeln der Gleichung, so ist

$$\triangle = (\alpha-\beta)^2\,(\alpha-\gamma)^2\,(\alpha-\delta)^2 : (\beta-\gamma)^2\,(\beta-\delta)^2\,(\gamma-\delta)^2$$

Haben wir nun 4 relle Wurzeln, so ist $\triangle > 0$; haben wir nur 2 reelle, so ist $\triangle < 0$, denn sind α und β reell, so ist

$(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\delta)$, $(\beta-\gamma)\,(\beta-\delta)$ positiv, aber $(\gamma-\delta)^2$ negativ, mithin auch $\triangle$.

Werden zwei Wurzeln gleich, was bei unserer Aufgabe die Coordinaten jedes Punktes der Evolute bewirken würden, so muss $\triangle = 0$ sein und wenn $E = 0$ die rationale Gleichung der Evolute ist, so muss E ein Faktor von $\triangle$ sein.

Zur Vergleichung müssen wir $\triangle$ als Funktion der Coefficienten kennen.

Für Gleichung

$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^3 + 4dx + c = 0$ ist nach Cayley,

$$a^6\triangle = J^3 - 27J_1^2, \text{ wo}$$
$$J = ae - 4bd + 3c^2$$
$$J_1 = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3.$$

Für unsere Gleichung ist

$$J = \frac{a^4}{12}[a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2]^2$$

$$J_1 = \frac{a^6}{8.27}\{[a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2]^2 + 2.27a^2\xi^2c^2\zeta^2(a^2-c^2)^2\}$$

$$a^6\triangle = J^3 - 27J_1^2$$
$$= -\frac{a^{12}}{a}a^2\xi^2c^2\zeta^2(a^2-c^2)^2[(a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2)^3 + 27a^2\xi^2c^2\zeta^2(a^2-c^2)^2]$$

$\triangle$ wird also wieder Null für

$$a^2\xi^2 + c\zeta^2 - (a^2-c^2)^2 = -3(a\xi)^{2/3}(c\zeta)^{2/3}(a^2-c^2)^{2/3}$$

oder $(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} = (a^2-c^2)^{2/3}$

ferner wird

$$\triangle \gtrless 0 \text{ für } (a^2\xi^2 + c^2\zeta^2 - (a^2-c^2)^2)^3 \gtrless -27a^2\xi^2c^2\zeta^2(a^2-c^2)^2$$

also

$$\Delta \gtrless 0, \text{ wenn } (a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} \lessgtr (a^2-c^2)^{2/3}.$$

§ 5.

Die Frage nach den Gleichgewichtspunkten unseres Halbellipsoids erledigt sich folgendermassen.

Beschränken wir uns zunächst auf die in der xz-Ebene liegenden Punkte, so liefert uns die in μ biquadratische Gleichung des § 4 II A immer zwei reelle Wurzeln γ^2 und α^2 und zwar

$$0 < \gamma^2 < c^2$$
$$a^2 < \alpha^2 < \infty$$

Die Gleichungen (2) des § 3 würden mit diesen Wurzeln sein,

$$1)\ x = \frac{a^2\xi}{a^2-\gamma^2}, \qquad z = \frac{c^2\zeta}{c^2-\gamma^2}$$

$$2)\ x = \frac{a^2\xi}{a^2-\alpha^2}, \qquad z = \frac{c^2\zeta}{c^2-\alpha^2}$$

Das in 1) gegebene Wertepaar x, z giebt uns den stets vorhandenen Stützpunkt unseres Halbellipsoids, da x und z beide positiv; das in 2) gegebene Wertpaar giebt, da x und z beide negativ sind, keinen Stützpunkt unseres Halbellipsoids. Ferner liegen in der xz-Ellipse noch 1 oder 2 reelle Fusspunkte, je nachdem

$$(a\xi)^{2/3} + (c\zeta)^{2/3} \gtrless (a^2-c^2)^{2/3} \text{ ist.}$$

Für diese wird x zwar positiv, z aber negativ, sollen sie auf unsern Halbellipsoid liegen, so muss

$$x \geqq a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \text{ sein;}$$

für $$x < a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} \text{ und } > -a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

müsste $z > + c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$, damit der Punkt auf unserm Halbellipsoid zu liegen käme.

Was nun die beiden ausserhalb der xz-Ebene liegenden Normalen betrifft, so sind deren Fusspunkte reell, wenn

$$\frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{c^2\zeta^2}{(b^2-c^2)^2} < 1 \quad \text{oder}$$

wenn $\delta^2 - \frac{55}{64}(1+\varepsilon)\,\delta + \frac{55}{64}\varepsilon < 0$

worin $\frac{b^2}{a^2} = \delta$, $\frac{c^2}{a^2} = \varepsilon$ ist. Damit aber diese Fusspunkte (falls sie reell sind) Stützpunkte unseres Halbellipsoids seien, muss noch sein

$$\frac{c^2\zeta}{b^2-c^2} < \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}} \cdot x$$

Es war aber

$$x = \frac{a^2\xi}{a^2-b^2},\ \xi = \frac{3}{8}\,a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\ \zeta = \frac{3}{8}\,c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

Es muss also sein

$$\frac{3}{8}c^3\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}\,(b^2-c^2)} < \frac{3}{8}\frac{ca^2}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-c^2}}$$

d. h. es muss $c < a$ sein, was wir vorausgesetzt haben, also liegen diese beiden Stützpunkte auf unserm Halbellipsoid.

Wollen wir untersuchen, ob unser Halbellipsoid auf der ebenen Begrenzungsfläche ruht, so haben wir, da sie auf der xz-Ebene senkrecht steht, nur von $\xi\zeta$ auf ihre Spur in der xz-Ebene eine Normale zu ziehen, trifft diese innerhalb der xz-Ellipse diese Spur, so ruht das Halbellipsoid auf der ebenen Begrenzungsfläche. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Normale mit der Spur sind

$$x = \frac{3}{8} a \frac{(b^2-c^2)\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\sqrt{a^2-c^2}}$$

$$z = -\frac{3}{8} c \frac{(a^2-b^2)\sqrt{b^2-c^2}}{b^2\sqrt{a^2-c^2}}$$

Damit der Punkt innerhalb der xz Ellipse liegt, muss sein

$$\frac{3}{8} a \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}} < a \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

oder

$$(1-\delta)(\delta-\varepsilon) < \frac{64}{9} \delta^2$$

Ist daher a gegen b und c nicht sehr gross, so wird das Halbellipsoid auf der Schnittfläche ruhen.

§ 6.

Haben wir ein Rotationsellipsoid, worin b = c ist, so geht unser Kreisschnitt durch die yz-Ebene und die Coordinaten des Schwerpunktes sind

$$\xi = \frac{3}{8} a, \ \eta = o, \ \zeta = o$$

Die Gleichung der Normalen ist

$$\frac{a^2}{x}(\xi-x) = \frac{b^2}{y}(\eta-y) = \frac{c^2}{z}(\zeta-z) = \mu$$

Hieraus hat man wie in § 3

1) $x = \frac{a^2\xi}{a^2+\mu}, \ y = \frac{b^2\eta}{b^2+\mu}, \ z = \frac{b^2\zeta}{b^2+\mu}$

2) $\xi = x\left(1+\frac{\mu}{a^2}\right), \ \eta = y\left(1+\frac{\mu}{b^2}\right), \ \zeta = z\left(1+\frac{\mu}{b^2}\right)$

In unserm Fall ist $\eta = o$, $\zeta = o$,

also muss entweder

$y = o$ und $z = o$, oder $\mu = -b^2$

Im ersten Fall wird

$x = \pm a$;

im zweiten

$$x = \frac{a^2\xi}{a^2-b^2}$$

Aus der Gleichung des Ellipsoids erhalten wir hieraus

$$\frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2}$$

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2}\right)$$

Dies ist aber die Gleichung eines Kreises; das halbe Ellipsoid ruht also in dem Nabelpunkt $x = a$ und auf den unendlich vielen Punkten dieses Kreises.

Für die Kugel erhalten wir nur den einen Punkt $x = a$, wenn a den Radius bezeichnet.

---

§ 7.

Bevor wir zur Betrachtung des Gleichgewichts am Ellipsoid gehen, schicken wir folgende Bemerkung voraus.

Wenn ein Kreis auf einer geraden Linie rollt, so ist klar, dass der Mittelpunkt O eine gerade Linie beschreibt. Jeder andere Punkt auf der Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Berührungspunkte beschreibt eine Curve, deren Tangente im Anfang parallel der festen Geraden ist. Liegt der Punkt A zwischen O und C, so ist die Curve, von der festen Achse aus gesehen, convex, denn A ist von allen Tangenten des Kreises weiter entfernt als von der Tangente im Punkte C. Ein Punkt B dagegen, der ausserhalb der Strecke OC auf dem Durchmesser oder auf seiner Verlängerung liegt, ist von keiner Tangente weiter entfernt, als von der des Punktes C, also bei einer kleinen Drehung des Kreises nähert sich der Punkt B der festen Geraden, oder er beschreibt von C gesehen eine concave Curve.

Denken wir uns nun unser Halbellipsoid in einer Gleichgewichtslage auf der Horizontalebene. Es sei C

der Berührungspunkt, S sei der Schwerpunkt, welcher lotrecht über C liegt. Verschieben wir das Ellipsoid unendlich wenig aus seiner Gleichgewichtslage, so ist das Gleichgewicht stabil, wenn die dann zur Wirkung gelangende, am Schwerpunkt angreifende Kraft das Ellipsoid in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht; labil, wenn sie das Ellipsoid immer weiter von der Gleichgewichtslage forttreibt. Wir wollen nun eine Verrückung vornehmen, so dass das Ellipsoid statt in C in dem Punkt C' aufliegt. Durch C' und die Normale von C legen wir eine Ebene, welche das Ellipsoid in einer gewissen Curve schneidet. Wir konstruiren uns den Krümmungskreis, der zum Punkte C dieser Curve gehört. M sei sein Mittelpunkt. Liegt C' unendlich nahe bei C, so liegt auch C' auf dem Krümmungskreis, und es ist dann so, als ob wir das Ellipsoid längs dieses Kreises ein wenig gedreht hätten. Liegt daher der Schwerpunkt S zwischen C und M, so beschreibt er von C gesehen eine konvexe Curve; liegt er ausserhalb CM, so beschreibt er eine konkave Curve. Es werde jetzt das Ellipsoid nach jeder möglichen Richtung um einen kleinen Winkel gedreht. Jeder Richtung entspricht ein besonderer Krümmungsmittelpunkt auf der Normalen, und je nach der Lage von S zu diesem Krümmungsmittelpunkt M beschreibt S eine konkave oder einn konvexe Curve. Man weiss nun aber, dass es zwei Richtungen giebt, für welche der Krümmungsradius ein Maximum resp. ein Minimum ist. Es sei CM_1 der kleinste, CM_2 der grösste Krümmungsradius. Wenn dann S zwischen C und M_1 liegt, so beschreibt S bei jeder Verrückung eine konvexe Curve; wenn S jenseits M_2 liegt, so beschreibt S bei jeder Verrückung eine konkave Curve. Liegt S zwischen M_1 und M_2, so beschreibt S bei einem Teil der Verrückungen eine konkave, bei dem andern Teil eine konvexe Curve. Alle diese Curven zusammen

bilden eine Fläche, die in dem ersten Fall konvex-konvex, in dem zweiten konkav-konkav und in dem dritten Fall konkav-konvex ist.

Wir können also, da wir uns vorstellen, dass alle Kräfte im Schwerpunkte angreifen, die Annahme machen, dass der Schwerpunkt im ersten Fall auf einer konvex-konvexen, im zweiten Fall auf einer konkav-konkaven und im dritten auf einer konkav-konvexen Fläche zu bleiben genötigt ist und können dann von der Gestalt des Körpers ganz abstrahiren. Nun ist aber unmittelbar klar, dass bei jeder Verrückung die Schwerkraft den Punkt S im ersten Fall in seine ursprüngliche Lage zurückzuführen strebt, im zweiten aber in der Richtung seiner Bewegung beschleunigt. Der erste Fall entspricht also dem stabilen, der zweite dem labilen Gleichgewicht. In dem dritten Fall ist das Gleichgewicht weder rein stabil noch rein labil; es giebt vielmehr Verrückungen, die eine hemmende, und solche, die eine fördernde Kraft hervorrufen. Immerhin aber hat dieser Fall mehr den Charakter des labilen als des stabilen Gleichgewichts. Da nämlich die konvexen Teile der Fläche notwendig höher gelegen sind als die konkaven, so wird der Schwerpunkt, auch wenn er zuerst nach dem konvexen Teil hin verrückt wurde, durch die Schwerkraft doch nach den niedriger gelegenen Teilen der Fläche hingetrieben werden und nach einigen Schwankungen um die Gleichgewichtslage sich dauernd von ihr entfernen.

Wenn der Schwerpunkt mit einem der Krümmungsmittelpunkte zusammenfällt, so kann man das Ellipsoid in dem diesen Krümmungsmittelpunkt entsprechenden Normalschnitt unendlich wenig verschieben, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird, denn auch die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit dem neuen Berührungspunkt ist normal zu dem Ellipsoid. In diesem

Falle sind daher zwei Gleichgewichtslagen in eine zusammengerückt. Wenn der Schnitt durch das Ellipsoid ein wenig geändert wird, so treten statt dieser einen Gleichgewichtslage zwei andere (reelle oder imaginäre) auf.

Wenn der Mittelpunkt des kleineren Hauptkreises mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, so ist das Gleichgewicht stabil; wenn der Mittelpunkt des grösseren Hauptkreises mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, so ist das Gleichgewicht labil. Trifft es sich endlich so, dass beide Krümmungsmittelpunkte mit dem Schwerpunkte zusammenfallen, was nur eintreten kann, wenn der Berührungspunkt ein Nabelpunkt ist, so kann man das Ellipsoid nach jeder beliebigen Richtung um eine unendlich kleine Strecke verschieben, ohne das Gleichgewicht aufzuheben.

Durch Rechnung erhalten wir diese Resultate am einfachsten auf folgendem Wege. Es sei die Horizontalebene die xy-Ebene, die darauf senkrechte Normale zur Fläche sei die z-Achse. Die x- und y-Achsen seien so gewählt, dass die xz- und yz-Ebenen mit den Hauptschnitten zusammenfallen. Sind dann ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien, so ist die Gleichung der Fläche bekanntlich

$$z = \frac{x^2}{2\varrho_1} + \frac{y^2}{2\varrho_2} + (3)$$

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte x, y, z ist

$$(\xi - x)\ p + (\eta - y)\ q - (\zeta - z) = o$$

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{x}{\varrho_1} + (2),\quad q = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{\varrho_2} + (2)$$

Die Entfernung eines auf der z-Achse im Punkte $z = l$ gelegenen Punktes von dieser Tangentialebene ist

$$l' = \frac{-\frac{x^2}{\varrho_1} + \ldots - \frac{y^2}{\varrho_2} + \ldots - l + z}{\pm\sqrt{\frac{x^2}{\varrho_1^2} + \frac{y^2}{\varrho_2} + \ldots + 1}}$$

$$l' = \left\{+\frac{x^2}{\varrho_1} + .. + \frac{y^2}{\varrho_2} + ... + 1 - \frac{x^2}{2\varrho_1} - \frac{y^2}{2\varrho_2} \cdots\right\}$$
$$\left\{1 - \frac{x^2}{2\varrho_1{}^2} \frac{y^2}{2\varrho_2{}^2} \cdots\right\}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2\varrho_1} + \frac{y^2}{2\varrho_2} - \frac{x^2}{2\varrho_1{}^2} 1 - \frac{y^2}{2\varrho_2{}^2} 1 + (3)$$

$$l' - 1 = \frac{x^2}{2\varrho_1{}^2} (\varrho_1 - 1) + \frac{y^2}{2\varrho_2{}^2} (\varrho_2 - 1) + (3)$$

Ist also

1) $\varrho_1 > 1$, $\varrho_2 > 1$, so ist $l' - 1 > o$, also
Stabiles Gleichgewicht.

2) $\varrho_1 < 1$, $\varrho_2 < 1$, so ist $l' - 1 < o$
Labiles Gleichgewicht.

3) $\varrho_1 > 1 > \varrho_2$, so ist

$$l' - 1 > o \text{ für } \left|\frac{x}{y}\right| > \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sqrt{\frac{1 - \varrho_2}{\varrho_1 - 1}}$$

$$l' - 1 < o \text{ für } \left|\frac{x}{y}\right| < \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sqrt{\frac{1 - \varrho_2}{\varrho_1 - 1}}$$

$$l' - 1 = o \text{ für } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sqrt{\frac{1 - \varrho_2}{\varrho_1 - 1}}$$

Für die Wurzel ist der positive Wert zu setzen. ϱ_1 und ϱ_2 sind beide als positiv gedacht, wie es ja beim Ellipsoid der Fall ist. Welcher Art in diesem Fall das Gleichgewicht ist, haben wir schon vorher besprochen.

4) $\varrho_1 = 1$, $l' - 1 < o$ für $y \gtrless o$
$= o$ für $y = o$
Labiles Gleichgewicht.

5) $\varrho_2 = 1$, $l' - 1 < o$ für $x \gtrless o$
$= o$ für $x = o$
Stabiles Gleichgewicht.

6) $\varrho_1 = 1 = \varrho_2$
$l' - 1 = o$.

§ 8.

Gehen wir jetzt zur Betrachtung der Art des Gleichgewichts bei unserm Schnitt über, so können wir leicht über den Charakter der beiden seitlichen Gleichgewichtslagen entscheiden.

Die Entfernung des Schwerpunktes von jedem der beiden Gleichgewichtspunkte ist nach § 3

$$l = -\mu \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$= b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Zur Bestimmung der Krümmungshalbmesser nehmen wir die von Joachimsthal angegebene Formel

$\varrho = k \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, worin für k die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\frac{x^2}{a^4}}{1 - \frac{k}{a^2}} + \frac{\frac{y^2}{b^4}}{1 - \frac{k}{b^2}} + \frac{\frac{z^2}{c^4}}{1 - \frac{k}{c^2}} = 0$$

zu setzen sind.

Es liegt nach unserer Voraussetzung $a > b > c$ eine Wurzel k_1 zwischen b^2 und c^2, die andere k_2 zwischen a^2 und b^2.

Es ist also, da

$b^2 > k_1$, $l > \varrho_1$

$b^2 < k_2$, $l < \varrho_2$,

das Gleichgewicht weder rein labil, noch rein stabil, sondern schwankend.

Gehen wir zu dem Fall $y = o$ über, so wird

$k_1 = b^2$ also

$$\varrho_1 = b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

k_2 liegt nach der Bestimmungsgleichung

$$\frac{\frac{x^2}{a^4}}{1-\frac{k}{a^2}} + \frac{\frac{z^2}{c^4}}{1-\frac{k}{c^2}} = 0$$

zwischen a^2 und c^2.

$$k_2 = a^2c^2 \frac{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}} \quad \text{und}$$

$$\varrho_2 = k^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Die Entfernung des Schwerpunktes von dem Fusspunkt der Normalen ist

$$l = -\mu \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

wobei für μ nach § 4 II A die biquadratische Gleichung $\frac{\xi^2}{a^2\left(1+\frac{\mu}{a^2}\right)^2} + \frac{\zeta^2}{c^2\left(1+\frac{\mu}{c^2}\right)^2} = 1$ besteht; wir haben ferner gesehen, dass wenn μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 der Reihe nach die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen, erhielten

$$\mu_1 < -c^2, \quad \mu_4 > -a^2$$

Für μ_1 erhalten wir also

$$\left.\begin{array}{l} -\mu_1 < k_1, \quad l < \varrho_1 \\ -\mu_1 < k_2, \quad l < \varrho_2 \end{array}\right\} \text{ stabiles Gleichgewicht;}$$

für μ_4

$$\left.\begin{array}{l} -\mu_4 > k_1, \quad l > \varrho_1 \\ -\mu_4 > k_2, \quad l > \varrho_2 \end{array}\right\} \text{ labiles Gleichgewicht.}$$

Für

$$\mu = \mu_2 \text{ ist } l < \varrho_2$$
$$\mu = \mu_3 \text{ ist } l > \varrho_2,$$

denn aus der Gleichung für k_2, in der wir x und z durch μ ausdrücken können, so dass sie lautet

$$\frac{\xi^2}{a^4\left(1+\frac{\mu_2}{a^2}\right)^2\left(1-\frac{k}{a^2}\right)}+\frac{\zeta^2}{c^4\left(1+\frac{\mu_2}{c^2}\right)^2\left(1-\frac{k}{c^2}\right)}=0,$$

folgt, dass $k_2 > -\mu_2$ ist; denn die linke Seite ist für $k_2 = \mu_2$ noch negativ, weil sie den Wert der Ableitung von

$$\frac{\xi^2}{a^2\left(1+\frac{\mu}{a^2}\right)^2}+\frac{\zeta^2}{c^2\left(1+\frac{\mu}{c^2}\right)^2}$$ darstellt; dieser aber

erst für einen zwischen μ_2 und μ_3 gelegenen Wert μ' verschwindet. Das Verhältnis von ϱ_1 und 1 lässt sich erst bestimmen, wenn man die Reihenfolge der drei Grössen b^2, μ_2, μ_3 kennt.

Ist $b^2 < -\mu_2 < -\mu_3$, so ist
für μ_2 $1 > \varrho_1$
für μ_3 $1 > \varrho_1$

Ist $-\mu_2 < b^2 < -\mu_3$, so ist
für μ_2 $1 < \varrho_1$
für μ_3 $1 > \varrho_1$

Ist $-\mu_2 < -\mu_3 < b^2$, so ist
für μ_2 $1 < \varrho_1$
für μ_3 $1 < \varrho_1$

Im ersten Fall haben wir also
für μ_2 schwankendes
für μ_3 labiles
im zweiten Fall für μ_2 stabiles
für μ_3 labiles
im dritten Fall für μ_2 stabiles
für μ_3 schwankendes Gleichgewicht.

Bei diesen Untersuchungen haben wir ausser Acht gelassen, dass einige Wurzeln deshalb in Fortfall kommen, weil die entsprechenden Normalen nach der zweiten Hälfte des Ellipsoids gehen. Nehmen wir aber an, dass diese zweite aus einer gewichtslosen, aber starren Masse besteht, so gelten die Untersuchungen im ganzen Umfange.

§ 9.

Numerisches Beispiel.

Es sei $a^2 = 3$, $b^2 = 2$, $c^2 = 1$.

Als Fusspunkte der beiden Normalen, die nicht in der xz-Ebene liegen, erhalten wir

$$x = \frac{a^2\xi}{a^2-b^2} = \frac{9}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}4428$$

$$z = -\frac{c^2\zeta}{b^2-c^2} = -\frac{3}{8\sqrt{2}} = -0{,}2652$$

$$y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{c^2\zeta^2}{(b^2-c^2)^2}\right)} = \pm\frac{1}{8}\sqrt{38}$$

$$= \pm 0{,}77055$$

Die beiden seitlichen Gleichgewichtspunkte sind also reell und liegen mithin auch nach § 5 auf unserm Halbellipsoid.

Es war $\varrho = k\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$; bei unsern Zahlwerten wird

$$k = \frac{110 \pm 2\sqrt{7.55}}{64}$$ und wir erhalten

$$\varrho_1^2 = 0{,}6314$$

$$\varrho_2^2 = 2{,}125$$

Bezeichnet l wieder die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit dem Unterstützungspunkte, so wird

$$l^2 = 1{,}719$$

Es ist also

$$\varrho_1^2 < l^2 < \varrho_2^2$$

mithin haben wir schwankendes Gleichgewicht.

Um die Coordinaten der 4 in der xz-Ebene liegenden Unterstützungspunkte zu erhalten, lösen wir die Gleichung 4. Grades in § 4 C mit den Werten für a^2, b^2, c^2 auf.

$q^2 - p^3$ wird negativ, weshalb wir also 4 reelle Wurzeln erhalten.

Setzen wir $q = r \cdot \cos\alpha$

$$\sqrt{q^2 - p^3} = ir \sin\alpha$$

so ist $\alpha = 42^0\ 57'\ 45''$

und wir erhalten für x und z folgende Werte

$x_1 = 0{,}60355, \quad z_1 = 0{,}93724$

$x_2 = 1{,}68807, \quad z_2 = -0{,}22303$

$x_3 = 0{,}81055, \quad z_3 = -0{,}88357$

$x_4 = -1{,}72433, \quad z_4 = -0{,}09473.$

Die Punkte $x_1\ z_1$ und $x_2\ z_2$ liegen auf unserm Halbellipsoid, obwohl z_2 negativ ist; denn

$$x_2 > a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$x_3\ z_3$ und $x_4\ z_4$ dagegen liegen auf der anderen Hälfte.

Für den Punkt $x_1\ z_1$ wird

$\varrho_1^2 = 3{,}5522$

$\varrho_2^2 = 7{,}0418$

$l^2 = 0{,}4662$. Es ist also

$l^2 < \varrho_1^2 < \varrho_2^2$

und wir haben stabiles Gleichgewicht.

Für den Punkt $x_2\ z_2$ wird

$\varrho_1^2 = 0{,}4432$

$\varrho_2^2 = 1{,}4652$

$l^2 = 1{,}7417;$

im Punkte $x_2\ z_2$ haben wir also, da

$\varrho_1^2 < \varrho_2^2 < l^2,$

labiles Gleichgewicht.

Für den Punkt $x_3\ z_3$ würde

$\varrho_1^2 = 3{,}4492$

$\varrho_2^2 = 5{,}6107$

$l^2 = 1{,}228$

also da

$l^2 < \varrho_1^2 < \varrho_1^2$

stabiles Gleichgewicht.

Für den Punkt x_4 z_4 würde

$$\varrho_1^2 = 0,\ 3563$$
$$\varrho_2^2 = 1{,}3535$$
$$l^2 = 4{,}8238$$

also da

$$\varrho_1^2 < \varrho_2^2 < l^2$$

labiles Gleichgewicht.

§ 10.

Zum Schluss wollen wir noch kurz den Charakter des Gleichgewichts beim Rotationsellipsoid betrachten.

Wir wissen aus § 6, dass wir einen Gleichgewichtspunkt im Nabelpunkt besitzen $x = + a$. Die Krümmungsradien sind in einem solchen Punkte alle gleich und zwar in unserm Fall $\frac{b^2}{a}$. Die Entfernung des Schwerpunktes vom Nabelpunkt beträgt $\frac{5}{8}a$; wir erhalten also im Nabelpunkt stabiles Gleichgewicht, wenn

$$5a^2 < 8b^2,$$

labiles Gleichgewicht, wenn

$$5a^2 > 8b^2.$$

Ausserdem konnte das halbe Ellipsoid noch in den unendlich vielen Punkten eines Kreises ruhen, dessen Gleichung war

$$y^2 + z^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2}\right)$$

Für $\frac{5}{8}a^2 = b^2$ fällt dieser Kreis mit dem Nabelpunkt zusammen.

Wegen der Symmetrie des Kreises zur Rotationsachse verhalten sich alle Punkte des Kreises gleich; die Krümmungsradien sind für alle gleich und das Gleichgewicht ist in allen von derselben Art.

Wir betrachten deshalb nur den einen Punkt in der xz-Ebene. Es wird

$$z = b \sqrt{1 - \frac{a^2\xi^2}{(a^2-b^2)^2}}$$

Ist also $\frac{5}{8}a^2 < b^2$, so wird z imaginär, und wir erhalten den Kreis nur, wenn $5a^2 > 8b^2$.

Für den Kreis bestand die Bedingung $\mu = -b^2$, mithin ist die Entfernung des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkt

$$l = b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

ferner wissen wir aus § 8

$$\varrho_1 = b^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$\varrho_2 = k_2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

Es ist aber in unserm Fall

$k_2 = a^2 \left(1 - \frac{9}{64}\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ und mithin für $5a^2 > 8b^2$ grösser als b^2; wir erhalten also für sämmtliche Punkte des Kreises stabiles Gleichgewicht.

Bei der Kugel ist, da der Schwerpunkt zwischen dem Mittelpunkt der Kugel und dem Berührungspunkt liegt, das Gleichgewicht stabil.

Berichtigung.

Seite 11 Zeile 9 von unten ist statt: $\sin\omega = \sin(\psi - \zeta)$ zu lesen:

$$\sin\omega = \sin(\psi - \varphi),$$

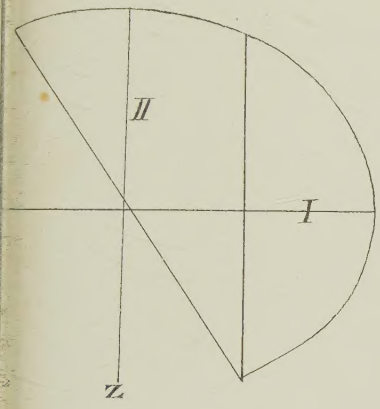
Lebenslauf.

Ich, Karl Franz Meyer, ev. bin am 30. Januar 1860 in Berlinchen geboren, als Sohn des 1876 dort verstorbenen Töpfermeisters Meyer und seiner dort noch lebenden Ehefrau geb. Küntzel.

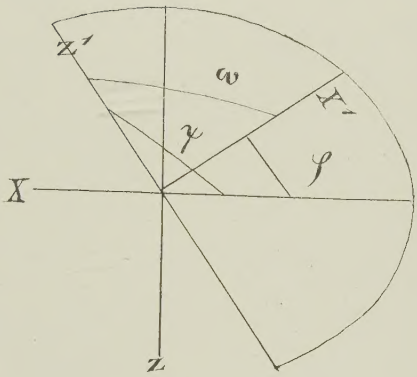
Von Ostern 1866 bis Oktober 1874 besuchte ich die Bürgerschule in meiner Vaterstadt, trat alsdann in die Tertia des Friedrich-Wilhelm-Realgymnasiums in Stettin ein und verliess dasselbe nach $5^1/_2$ Jahren, Ostern 1880, mit dem Zeugnis der Reife, um an der Universität zu Berlin Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren.

Vom April 1880 bis März 1884 gehörte ich dieser Hochschule als immatrikulierter Studierender der philosophischen Fakultät an, während welcher Zeit ich besonders die Vorlesungen folgender Professoren hörte: Wangerin, Kummer, Hettner, Weierstrass, Knoblauch, Kirchhoff, Helmholtz, Zeller, Paulsen, Wagner, Kiepert, Schwendener.

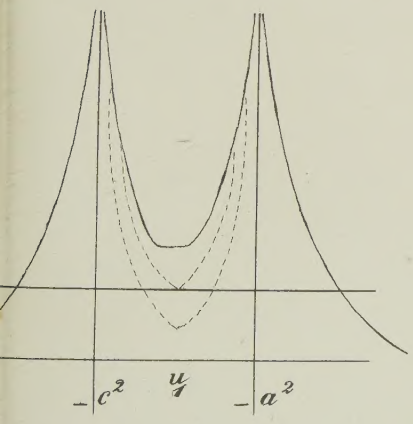
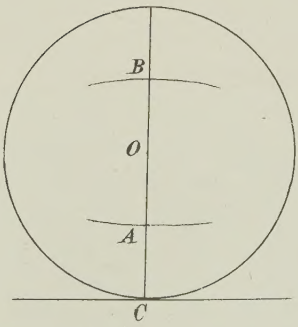
Figur zu Seite 6



Figur zu Seite 9



Figur zu Seite 18



Figur zu Seite 26